به جهان خرّم از آنم که جهان خرّم از اوست

عاشقم بر همه عالم که همه عالم از اوست

عنوان:
فضاهای توپولوژی $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد

استاد راهنما: آقای دکتر علی رضایی علی‌آباد

استاد مشاور: آقای دکتر رستم محمّدیان

پژوهشگر: علی مددپور

دانشگاه شهید چمران اهواز

بهمن ۱۳۹۴

عنوان: فضاهای توپولوژی $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد

تعاریف و مفاهیم اوّلیّه

معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد

فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی

فضای $C_c(X)$ زمانی که X

1. تعاریف و مفاهیم اوّلیّه
2. معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد
3. فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی
4. فضای $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد
5. مراجع

۱ تعاریف و مفاهیم اوّلیّه

۲ معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد

۳ فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی

۴ فضای $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد

۵ مراجع

در این قسمت به تعریف مفاهیم اوّلیّه‌ی توپولوژی ازجمله پایه و زیرپایه و اصول شمارایی پرداخته‌ایم. همچنین به معرّفی مقدّمات فضای متری و نگاشت‌های باز و بسته و ارتباط آنها با پیوستگی پرداخته و در نهایت اصول جداسازی را معرّفی می‌کنیم.

۱ تعاریف و مفاهیم اوّلیّه

۲ معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد

۳ فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی

۴ فضای $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد

۵ مراجع

۱ تعاریف و مفاهیم اوّلیّه

۲ معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد

۳ فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی

۴ فضای $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد

۵ مراجع

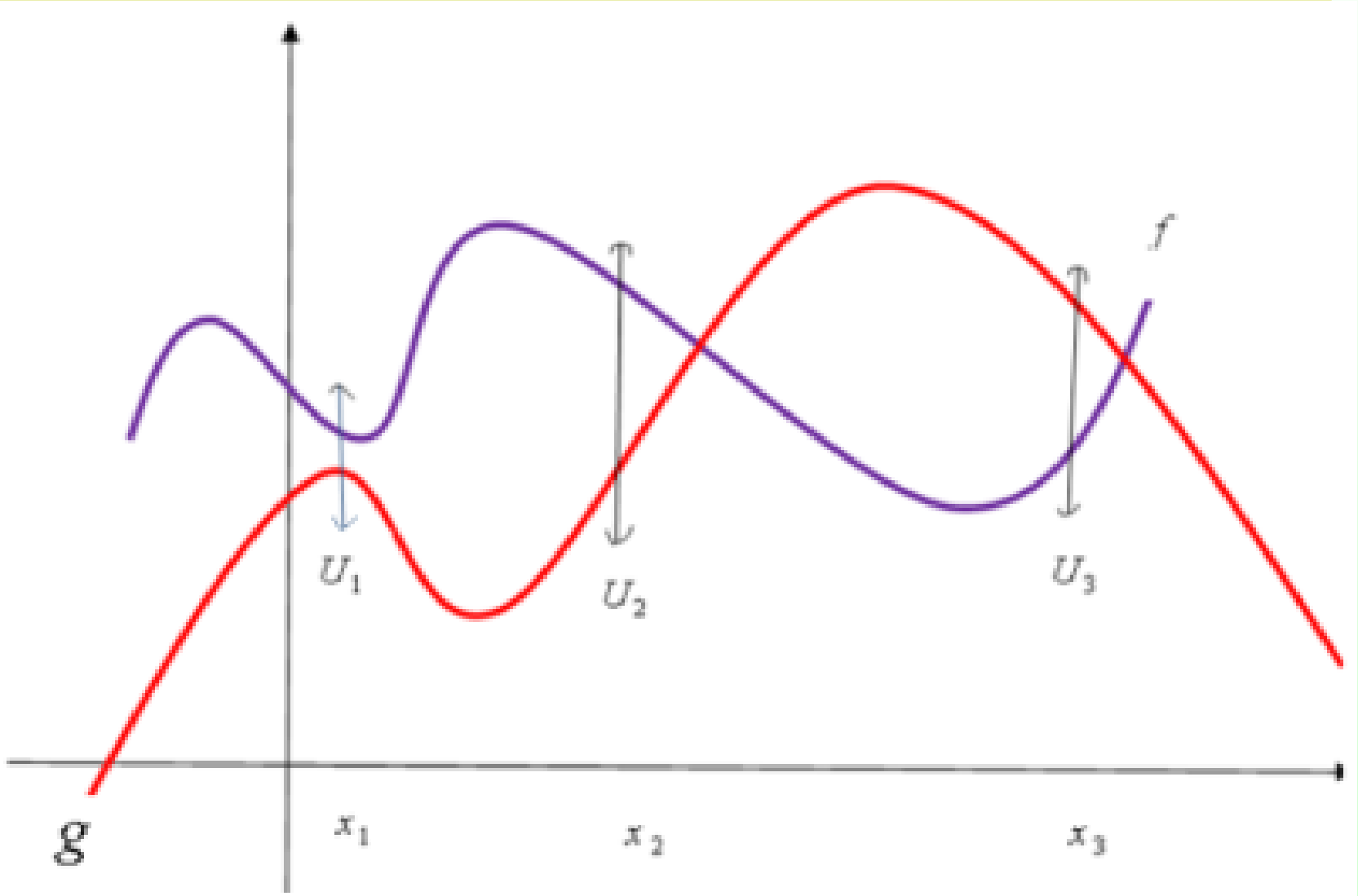
در این قسمت به معرّفی فضای تابعی می‌پردازیم که فضای مورد نیاز در این نوشته است و سپس فضاهای فرشه، فرشه-یوریسون، برنولوژی، بارلد، بئر و نیز فضای مک‌کی که اساس این پایان‌نامه روی این فضاها بنا نهاده شده است را معرّفی می‌کنیم.

تعریف ۱

نقطه‌ای مانند x از مجموعه‌ی X و مجموعه‌ی بازی مانند U در فضای Y را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم: $S(x,U)=\{f : f\in Y^X, f(x)\in U\}$. مجموعه‌های به‌صورت $S(x,U)$ تشکیل زیر پایه‌ای برای یک توپولوژی بر Y^X می‌دهند. این توپولوژی را **توپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه** یا توپولوژی نقطه-باز می‌نامیم. اگر B پایه‌ای برای Y باشد، آنگاه گردایه‌ی زیر، پایه‌ای برای فضای Y^X با توپولوژی نقطه-باز است:

$$\ell=\{S(x_1,x_2,...,x_n,U_1,U_2,...,U_n) : x_i\in X, U_i\in B, \forall i=1,2,...,n\}.$$

برای توصیف عناصر پایه‌ای در این فضای توپولوژی ابتدا به نمودار زیر توجه می‌کنیم:



یک عضو پایه‌ی نوعی این توپولوژی به‌صورت یک اشتراک متناهی از اعضای زیر پایه‌ی $S(x, U)$ است. بدین‌گونه که یک عضو نوعی پایه‌ای حول تابع f عبارت است از همه‌ی توابعی مانند g که در تعدادی متناهی از نقاط به f «نزدیک» اند. یک همسایگی از این نوع را در شکل بالا می‌بینید. این همسایگی از همه توابعی مانند g تشکیل شده است که نمودار آنها سه بازه‌ی قائم تصویر شده در شکل زیر را قطع می‌کند.

قضیه ۲

دنباله‌ی f_n از توابع با توپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه به تابع f همگراست اگر و تنها اگر به ازاء هر x از X دنباله‌ی $f_n(x)$ از نقاط Y به $f(x)$ همگرا باشد.

عنوان: فضاهای توپولوژی $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد
تعاریف و مفاهیم اوّلیّه
معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد
فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی
فضای $C_c(X)$ زمانی که X

در این قسمت بیشتر تمرکز ما روی معرّفی فضاهای توپولوژیی است، که در ادامه‌ی کار مورد استفاده قرار می‌گیرند و در واقع در ارتباط با فضای $C_c(X)$ هستند. در انتها به معرّفی فضای برداری توپولوژیکی و همچنین فضای توپولوژی موضعاً محدّب برداری پرداخته‌ایم که در این پایان‌نامه نقشی اساسی دارند.

عنوان: فضاهای توپولوژی $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد

تعاریف و مفاهیم اوّلیّه

معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد

فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی

فضای $C_c(X)$ زمانی که X

۱ تعاریف و مفاهیم اوّلیّه

۲ معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد

۳ فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی

۴ فضای $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد

۵ مراجع

در این قسمت با مقدّمه‌ای به تشریح قضایا و مثالهای مرجع [۲۵] می‌پردازیم که اساس این پایان‌نامه از روی این مرجع اقتباس شده است. لازم به توضیح است که از این به بعد هر جا صحبت از فضای X باشد منظور فضای کاملاً منظّم و هاسدورف است مگر آنکه خلاف آن بیان شود. در ادامه نشان داده می‌شود که سفتی شمارایی، توصیف مفید و متمایزی از فضای فرشه می‌باشد.

قضیه ۳

فرض کنیم یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $C_c(X)$ یک فضای فرشه است.

۲) $C_c(X)$ فضای فرشه-یوریسون است.

۳) $C_c(X)$ دارای سفتی شمارا است.

۴) $C_c(X)$ شامل یک $LM-$زیرفضای چگال است.

۵) X یک فضای $\sigma-$فشرده است.

مثال ۴

فرض کنیم T فضای صفحه‌ی تیخونوف باشد. $C_c(T)$ سفتی شمارایی ندارد.

مثال ۵

اگر ω_1 اولین عدد ترتیبی ناشمارا و $[0,\omega_1)$ معرف مجموعه‌ی همه‌ی اعداد ترتیبی شمارا و مجهز به توپولوژی ترتیبی باشد، آنگاه $C_c([0,\omega_1))$ که فضای طراحی شده به نام **فضای موریس-ولبرت** است و سفتی شمارایی ندارد.

لم ۶

فرض کنیم X یک مجموعه باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:

۱) X شماراست. ۲) $\mathbb{R}^X$ یک فضای فرشه-یوریسون است.

۳) $\mathbb{R}^X$ دارای سفتی شمارا است.

۴) $\mathbb{R}^X$ سفتی کرانداری دارد.

نتیجه ۷

گیریم X یک فضای موضعاً فشرده‌ی متری باشد. در این صورت نتایج زیر معادلند:

۱) $C_c(X)$ یک فضای فرشه است.

۲) $C_c(X)$ یک فضای فرشه-یوریسون است.

۳) $C_c(X)$ دارای سفتی شمارا است.

۴) $C_c(X)$ شامل یک LM -زیرفضای چگال است.

۵) فضای X یک فضای تفکیک‌پذیر است.

نتیجه‌ی قبل برای فضایی که موضعاً فشرده نباشد صحیح نیست. در مثال بعد دلیل این واقعیّت را می‌بینیم.

مثال ۸

اگر به $\mathbb{Q}$ توپولوژی القایی معمولی از اعداد حقیقی را اختصاص دهیم، آنگاه $C_c(\mathbb{Q})$ دارای سفتی شمارا است امّا فرشه-یوریسون نیست.

عنوان: فضاهای توپولوژی $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد

تعاریف و مفاهیم اوّلیّه

معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد

فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی

فضای $C_c(X)$ زمانی که X

تعریف ۹

پوشش باز $\mathfrak{U}$ از X، را یک **پوشش فشرده-باز** گوییم هرگاه برای هر مجموعه‌ی فشرده‌ی K در X، یک $U \in \mathfrak{U}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $K \subseteq U$ باشد.

قبل از بیان لم بعد یادآوری می‌کنیم که طبق نتیجه‌ی شناخته شده ازمک‌کوی و **نانچو**، $C_c(X)$ دارای سفتی شمارا است اگر و تنها اگر هر پوشش فشرده-باز از X دارای یک زیر پوشش فشرده-باز شمارا باشد.

لم ۱۰

اگر X فضای شمارای نوع دوّم باشد، آنگاه $C_c(X)$ دارای سفتی شمارا است.

لم ۱۱

فرض کنیم X فضای کاملاً منظّم و هاسدورف و Y یک زیرفضای چگال از X باشد. اگر $C_p(Y)$ فرشه-یوریسون باشد و A یک مجموعه‌ی هم‌پیوسته درون $C(X)$ باشد، آنگاه وجود $f \in \overline{A}^{C_p(X)}$، وجود دنباله‌ی $\{f_n\}$ در A را تضمین می‌کند به‌طوری‌که در $C_p(X)$، $\{f_n \longrightarrow f\}$.

لم ۱۲

فرض کنیم X یک فضای توپولوژی موضعاً فشرده و هاسدورف و شمارای نوع اوّل باشد. اگر A مجموعه‌ای کراندار در $C_c(X)$ باشد، آنگاه A روی X هم‌پیوسته است.

قضیه ۱۳

اگر K فشرده و شمارای نوع اوّل باشد، آنگاه $C_c(K)$ فشرده‌حقیقی است یا گویند **خاصیت مازور** دارد.

لم ۱۴

فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف و شمارای نوع اوّل باشد و Y یک مجموعه‌ی چگال از X باشد. اگر $C_p(Y)$ فرشه-یوریسون باشد و $C_p(X)$ سفتی کرانداری داشته باشد، آنگاه $C_c(X)$ فرشه-یوریسون است.

لم ۱۵

$C_p(X)$ مترپذیر است اگر و تنها اگر X شمارا باشد.

قضیه ۱۶

فرض کنیم X یک فضای توپولوژی موضعاً فشرده و هاسدورف و تفکیک‌پذیر و شمارای نوع اوّل باشد. در این صورت نتایج زیر معادلند:

۱) $C_c(X)$ یک فضای فرشه-یوریسون است.

۲) $C_c(X)$ یک فضای فرشه-یوریسون است.

۳) $C_c(X)$ سفتی کرانداری دارد.

۴) $C_c(X)$ دارای سفتی شمارا است.

۵) $C_c(X)$ شامل یک $LM-$زیرفضای چگال است.

۶) X یک فضای $\sigma-$ فشرده است.

۱ تعاریف و مفاهیم اوّلیّه

۲ معرّفی چند فضای توپولوژی پرکاربرد

۳ فضاهای توابع ومعرّفی چند فضای توپولوژی

۴ فضای $C_c(X)$ زمانی که X موضعاً فشرده باشد

۵ مراجع

مراجع

1. A. Borumand Saeid, S. Zahiri, *Radicals in MTL-algebras*, Fuzzy Sets and Systems. **236**(2014) 91-103.
2. A. Kadji, C. Lele, M. Tonga, *Fuzzy prime and maximal filter of residuated lattices*, Soft comput.**(2016)** DOI: 10.1007/s00500-016-2113-2.
3. Y. Zhu, Y. Xu, *Filter theory of residuated lattice*, Inform. Sci. **180** (2010) 3614-3632.
4. A. Borumand Saeid, S. Zahiri, *Radicals in MTL-algebras*, Fuzzy Sets and Systems. **236**(2014) 91-103.
5. A. Kadji, C. Lele, M. Tonga, *Fuzzy prime and maximal filter of residuated lattices*, Soft comput.**(2016)** DOI: 10.1007/s00500-016-2113-2.

6. Y. Zhu, Y. Xu, *Filter theory of residuated lattice*, Inform. Sci. **180** (2010) 3614-3632.

با تشکر از حسن توجه شما